

Α.Μ.	ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΤΟΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΥΡΙΑΚΟΣ Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ (ΛΕΚΤΟΡΑΣ)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ - ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΙΟΥΝΙΟΥ
13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

- 1. (1.0)** Βρείτε τη γενική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y(n+1) - 0.5y(n) = 2, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$y(0) = 2,$$

και μελετήστε το όριο της λύσης αυτής.

- 2. (2.0)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{1-x}{3}, & x \in (\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

και την εξίσωση διαφορών

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Εξετάστε αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το σημείο $x(0) = \frac{1}{3^k}$ να είναι τελικά σημείο ισορροπίας αυτής της εξίσωσης.

- 3. (1.0)** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y'(t) - y(t) = 2t, \quad t \in [0, 1]$$

μαζί με την αρχική συνθήκη

$$y(0) = 1.$$

Χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο του Euler με βήμα $h = 0.25$ προσεγγίστε το $y(0.5)$ και στη συνέχεια βρείτε την ακριβή τιμή του $y(0.5)$.

- 4. (1.0)** Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών

$$x(n+1) = -x^3(n) - x(n), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Βρείτε τα σημεία ισορροπίας της εξίσωσης και χαρακτηρίστε τα ως προς την ευστάθεια τους, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τους σχετικούς ορισμούς.

- 5. (2.0)** Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών

$$y(n+2) - (n+2)y(n+1) + (n+2)y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αφού πρώτα επιβεβαιώσετε ότι η ακολουθία $y_1(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι μερική λύση της εξίσωσης, βρείτε τη γενική λύση αυτής χρησιμοποιώντας τη μέθοδο υποβιβασμού της τάξης.

- 6. (1.0)** Επιλύστε την εξίσωση διαφορών

$$x(n+1) = \frac{2x(n) + 3}{3x(n) + 2}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση

$$3x(n) + 2 = \frac{y(n+1)}{y(n)}.$$

- 7. (2.0)** Λύστε την εξίσωση διαφορών

$$y(n+1) = \frac{y(n)}{(n+2) + n^2y(n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

και μελετήστε το όριο της λύσης.